複素関数に於ける平均値定理
A Mean Value Theorem in Complex Function Theory

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要
Abstract
It is said that there does not exist any mean value theorem in ordinary form in complex function theory. In this short paper we present a mean value theorem in integral form in complex function theory.

Key words ; mean value theorem, complex function theory.
Mathematics Subject Classification 2010;　30A.

初歩の微分積分学で修得する幾つかの平均値定理の中で必ず出て来るのは Lagrange の平均値定理：
x の関数 $f : x \to f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能であれば

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \ with \ a < c < b$$

をみたす実数 c が存在する。
である。また，積分の平均値定理(積分の第１平均値定理)：
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c) \ with \ a < c < b$$

をみたす実数cが存在する。
等の積分の平均値定理もあるが本質は同じである。と云うのも，$F(x)$を$f(x)$の不定積分とすれば，この定理は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = (b-a)F'(c) = (b-a)f(c) \ with \ a < c < b$$

となり，上記Lagrangeの定理に帰着するからである。このLagrangeの定理には次の一般化Taylor展開がある [1]: $f(x) \in C^n[a, b]$であれば

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!m}(b-a)^m(b-\xi)^{n-m} \\ &\qquad for\ 1 \le m \le n,\ a <^{\exists} \xi < b \end{aligned}$$

ここで，右辺第2行目の第2項はRoche-Schlömilchの剰余項，$m = 1$, nのときは，それぞれCauchy，Lagrangeの剰余項と呼ばれている。右辺第1行目は積分型のTaylor展開と呼ばれている。
この平均値定理を複素関数に一般化することを考えると，
「$\cdots$，函数値がベクトル値 (複素数の場合も) には，もはやそのままでは成立しないからである。 $\cdots$」 [1]p.192,
「注意 微積分における平均値の定理はそのままの形では成立しない。たとえば$f(z) = e^{\pi i z}$とするとき

$$f(1) - f(0) = e^{\pi i} - 1 = \pi i e^{\pi i \theta} \quad (0 < \theta < 1)$$

が成立しない。左辺と右辺の絶対値が，それぞれ2, πとなって合わない。」
[2]p.50
が障害となるが，次の積分型の平均値定理は成り立つ。

定理 1　(複素関数の平均値定理)
$z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, 滑らかな経路$z = z(t)$, $z(0) = z_1$, $z(1) = z_2$として，解析関数$f(z)$は経路$z(t)$, $0 \le t \le 1$の近傍で正則とすると，

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_0^1 f'(z(t))z'(t)dt,$$

特に，$z(t)$をz_1とz_2を結ぶ線分$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$とすると，

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)\int_0^1 f'(z_1 + t(z_2 - z_1))dt$$

である。

証明
微分積分学の基本定理と積分変数の変換により

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \int_{z_1}^{z_2} f'(z)dz \\ &= \int_0^1 f'(z(t))z'(t)dt \end{aligned}$$

を得る。特に $z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ とすると，$z'(t) = z_2 - z_1$ であるので
定理を得る。□

系 1 (能代清 1906-1977 の平均値定理 [2]p.49,50)
開円盤 D で $f(z)$ が正則ならば，$\alpha, \beta \in D$ のとき

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)\{\Re f'(\gamma_1) + i\Im f'(\gamma_2)\}$$

を満たす γ_1, γ_2 が α と β とを結ぶ線分上にある。

に対しても次の別証明を得る。
別証明
定理 1 より

$$\begin{aligned} f(\beta) - f(\alpha) &= (\beta - \alpha)\int_0^1 f'(\alpha_1 + t(\beta_2 - \alpha_1))dt \\ &= (\beta - \alpha)\int_0^1 \{\Re f'(\alpha_1 + t(\beta_2 - \alpha_1)) + i\Im f'(\alpha_1 + t(\beta_2 - \alpha_1))\}dt \\ &= (\beta - \alpha)\{\Re f'(\gamma_1) + i\Im f'(\gamma_2)\}dt \end{aligned}$$

ここで最後の等号では積分の第 1 平均値定理を使った。□

参考文献

[1] 一松信 Hitotsumatsu,Sh.:『解析学序説，上巻』裳華房，1962.
Introduction to Analysis (in Japanese)，vol.1, Shokabo, Tokyo, 1962.

[2] 龍沢周雄 Tatuzawa,T.:『関数論』共立出版，共立全書 233，1980.
Complex Function Theory (in Japanese)，Kyouritsu-Shuppan, Tokyo, 1980.

(received 10 October 2015.)